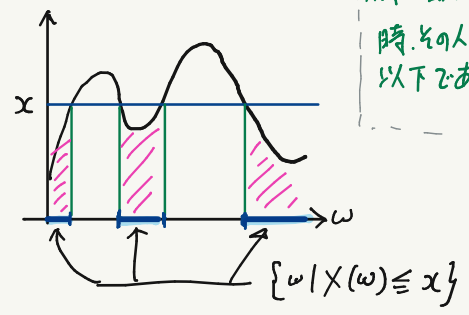


確率数理工学 (2)

例: 日本人の身長に選んだ時、その人の身長が170cm以下である事象は可測。



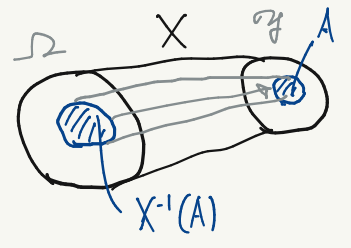
Def (確率変数)

(Ω, \mathcal{F}, P) : 確率空間
関数 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ 2

$$X^{-1}((-\infty, x]) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

を満たす時、 X を 確率変数 (random variable, r.v.) と呼ぶ。
(r.v. と書く)

[注] 「逆像」
 $X: \Omega \rightarrow \mathcal{Y}$ と \mathcal{Z}
 $A \subset \mathcal{Z}$ に対し
 $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$



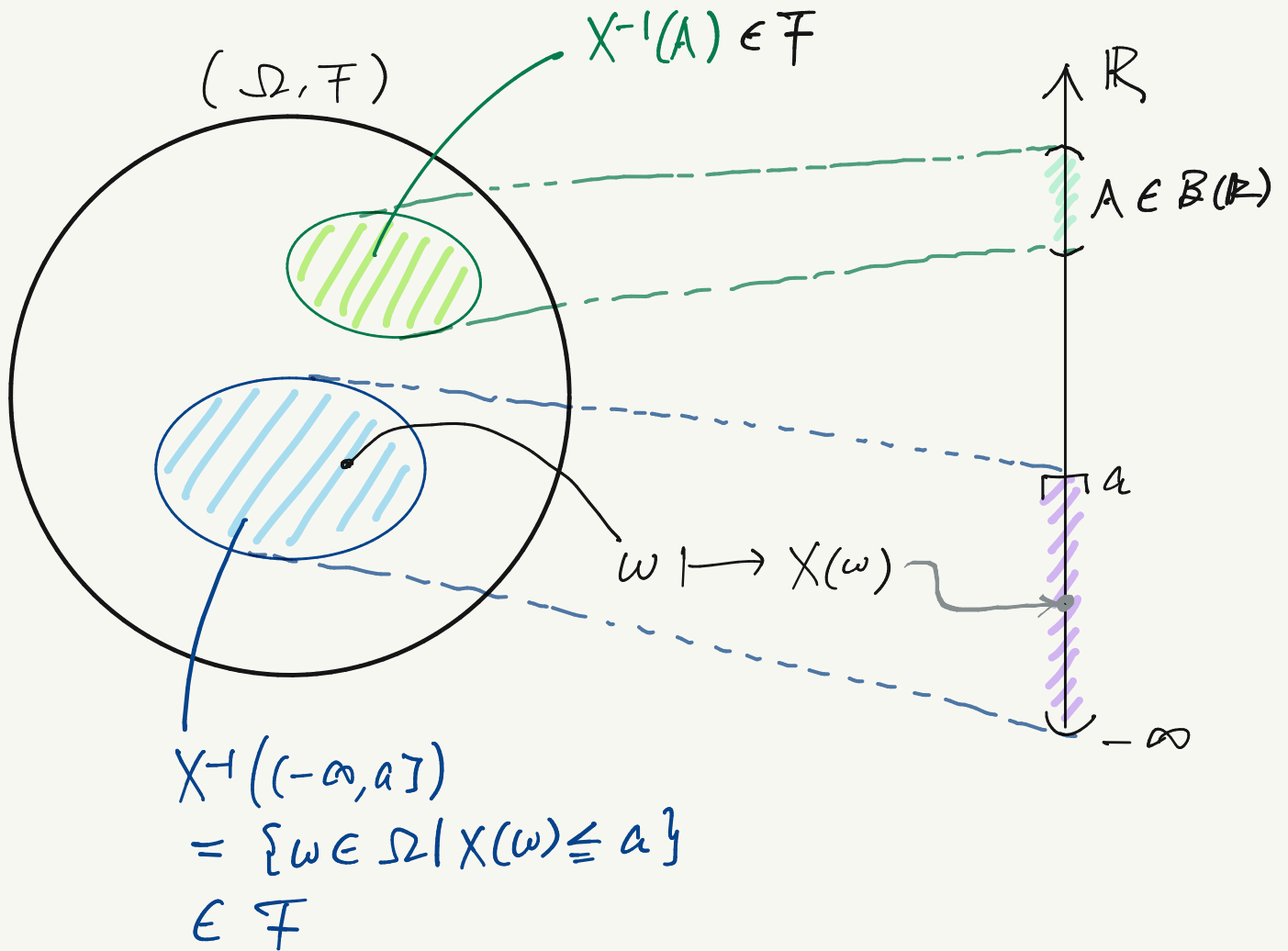
$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ のことを $\{X \leq x\}$ 或 $\{X(\omega) \leq x\}$ と書く。
 $\{X \leq x\}$ なる事象が 可測 (F に含まれる) であることから
「可測関数」 とも言う。
「確率変数 = 可測関数」

⊛ 任意のボレル集合 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し、 $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ であること。上記の定義は同値。(詳細は後述)

「 $X \leq x$ である確率は「測りたい」」

「 $X \in A$ ($A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$) である確率は「測れる」」

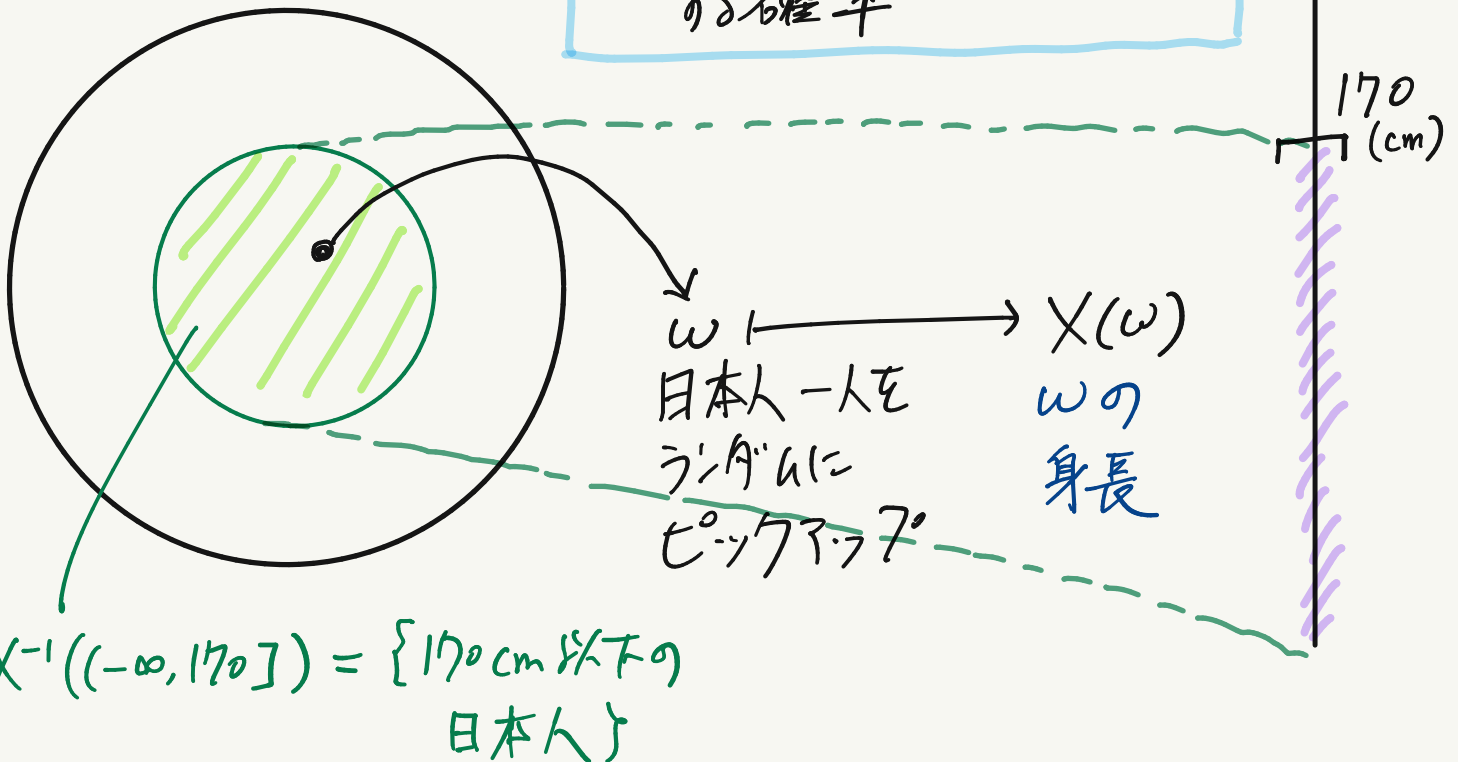
Ex. $\Omega = \{\text{金, 銀, 銅, 何もない}\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ (全部集合) ← 確率変数
賞金: $X(\text{金}) = 1000$, $X(\text{銀}) = 100$, $X(\text{銅}) = 10$, $X(\text{何もない}) = 0$
 $P(\text{金}) = 0.1$, $P(\text{銀}) = 0.2$, $P(\text{銅}) = 0.3$, $P(\text{何もない}) = 0.4$



例

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 170) &= P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 170\}) \\
 &= 170 \text{ cm 以下の人をピックアップする確率}
 \end{aligned}$$

$\Omega =$ 日本人全体



Thm

$\mathcal{B} = (-\infty, a]$ に加えられる.

$$X \text{ は r.v.} \iff \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ に対し, } X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

この定義として採用することが多い.

Proof

\Leftarrow は自明. 仮定なら, $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists (-\infty, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ \exists があるため,
 \Rightarrow を示す.

$\mathcal{B}_0 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ とおく (\mathcal{B}_0 は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の部分集合. これは $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ と一致することを示した.)

確率変数の定義より $(-\infty, a] \in \mathcal{B}_0$ ($\forall a \in \mathbb{R}$) \exists である.

したがって \mathcal{B}_0 は σ -加法族であることもわかる. 仮定なら

(1) $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathcal{F}$ (\mathcal{F} の定義より) なるので $\mathbb{R} \in \mathcal{B}_0$.

(2) $A \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \Rightarrow (X^{-1}(A))^c \in \mathcal{F} \Rightarrow X^{-1}(A^c) \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}_0$

\uparrow
 \mathcal{B}_0 の定義

\nwarrow (補集合)

(3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow X^{-1}(A_n) \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n) \in \mathcal{F}$ ($\because \mathcal{F}$ は σ -加法族)

$\Rightarrow X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in \mathcal{F}$ ($\because \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n) = X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$)

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}_0$

\nwarrow (可算和)
 : 演習問題

以上より \mathcal{B}_0 は $\{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ を含む最小の σ -加法族を含む
 とはいふ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ である (\because 次のレマより).

つまり, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}_0$ となるので, \Rightarrow を示せた. //

部分集合族 \mathcal{A} に対し、 \mathcal{A} を含む最小の σ -加法族を $\sigma(\mathcal{A})$ と書く。

Lem

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\} \text{ に対し、 } \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) //$$

Proof

$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ はすぐわかる。よって、 $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。

逆の $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{A})$ を示す。そのために、 $\sigma(\mathcal{A})$ が任意の開集合を含むことを示せばよい。

これは、任意の開集合 B は、可算無限個の開区間 $(a-\delta, a+\delta)$ の和集合として書けることが示せれば十分である。

たとえば、開区間 (a, b) は $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, b - \frac{1}{n}] \setminus (-\infty, a]$ と書けることから、

$\sigma(\mathcal{A})$ に入り、 $\sigma(\mathcal{A})$ の元の可算無限和で B が表せるなら σ -加法性より $B \in \sigma(\mathcal{A})$ となるからである。

任意の $x \in B$ に対し、 B は開集合であることから ある $\varepsilon > 0$ が存在して、

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset B \text{ とできる。}$$

そこで、ある有理数 q, δ が存在し、

$$x \in (q-\delta, q+\delta) \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset B \quad \dots \textcircled{1}$$

とできる。

(たとえば、 $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{1}$) とできる。 ($(x-\delta, x+\delta) \cap \mathbb{1} \supset q \in \mathbb{Q}$ を取って表せばよい。)

今、

$$B' = \bigcup \{ (q-\delta, q+\delta) \mid q, \delta \in \mathbb{Q}, \delta > 0, (q-\delta, q+\delta) \subset B \}$$

とある。

$B = B'$ を示す。これは示せばいい。 B' は開区間の可算和なので $B \in \sigma(\mathcal{A})$ 。

(i) $B' \subset B$ は B' の構成よりすぐわかる。(B' を構成する開区間は B に含まれる。)

(ii) $B \subset B'$ は $\textcircled{1}$ から従う。

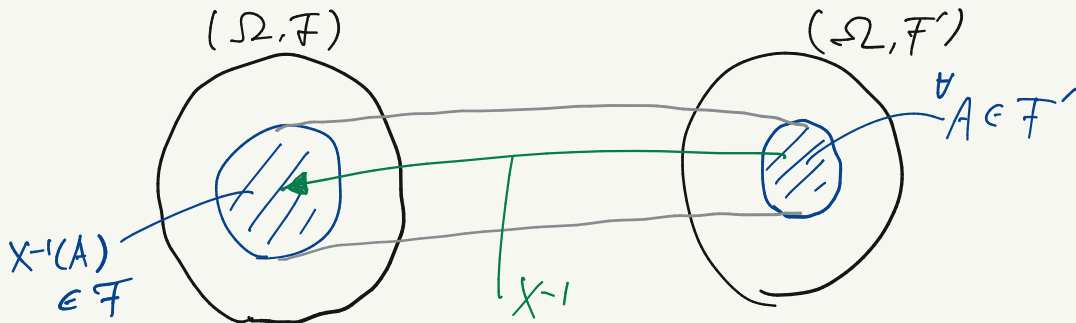
よって、 $B = B'$ である。 //

//

○ より一般に、可測空間 (Ω, \mathcal{F}) , (Ω', \mathcal{F}') に対し、

$X: \Omega \rightarrow \Omega'$ を $\forall A \in \mathcal{F}'$ について $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ を満たす時、
 X を \mathcal{F}/\mathcal{F}' -可測関数 と言う

(このとき、 $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ と書いたりする)



☆ 先の可測関数 (確率変数) の定義は、 $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ の場合に対応。

○ $X_1: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$, $X_2: (\Omega', \mathcal{F}') \rightarrow (\Omega'', \mathcal{F}'')$ (可測関数) に対し、

$X_3 = X_2 \circ X_1: \omega \in \Omega \mapsto X_2(X_1(\omega)) \in \Omega'' \in \mathcal{F}/\mathcal{F}''$ -可測。

◦ $X: \Omega \rightarrow \Omega'$ ($(\Omega, \mathcal{F}), (\Omega', \mathcal{F}')$: 可測空間)

Ω' の部分集合族 \mathcal{B}' に対し、 $\sigma(\mathcal{B}')$ は \mathcal{B}' を含む最小の σ -加法族とする。

$\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{B}')$ なら、

「 X が \mathcal{F}/\mathcal{F}' -可測」 $\iff \forall A \in \mathcal{B}'$ に対し、 $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ 」
 \mathcal{F}' は σ 族。

が成り立つ。

(\mathcal{B}' は \mathcal{F}' を "生成" する。 X の \mathcal{F}/\mathcal{F}' -可測性を担保するには、 \mathcal{B}' における可測性の外語句は十分)。(演習問題参照)

Lem

[$(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ のとき、 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が連続なら
 X は可測]

(Proof) $X^{-1}((a, \infty))$ は開集合なので (X の連続性より)。

$X^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。 かつ $X^{-1}((-\infty, a]) = (X^{-1}((a, \infty)))^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。 //

Def (分布関数) 重要

X : r.v. \leftarrow random variable の略

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}) \quad (x \in \mathbb{R})$$

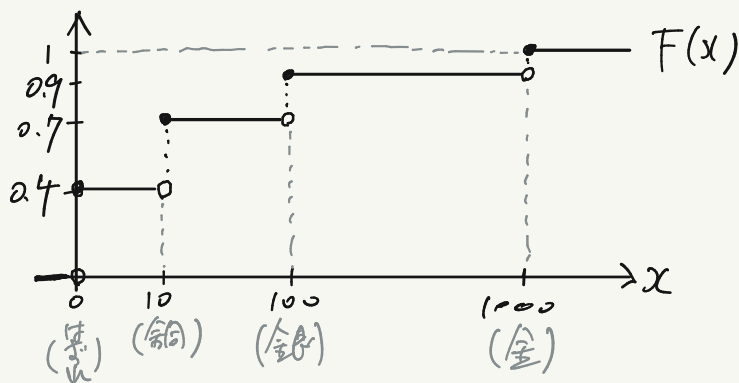
とあると、 F を X の (累積)分布関数 と言う。

(cumulative distribution function, c.d.f.)

$$F(x) = P(X \leq x) \text{ 也 } F(x) = P(\{X(\omega) \leq x\}) \text{ と } \text{同} \text{ 記} \text{ 可} //$$

\uparrow F が定義されるためには、
 $\{X \leq x\}$ が可測である必要がある。
 X が r.v. なら、その可測性が担保される。

次のくじびきの例:

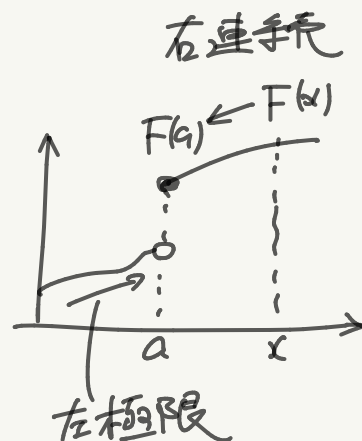


Thm (分布関数の性質)

(1) $x < y \implies F(x) \leq F(y)$ (単調非減少)

(2) $\lim_{x \rightarrow a+0} F(x) = F(a)$ (右連続)

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$



\times $\lim_{x \rightarrow a-0} F(x) = F(a)$ とは 限 なく。
 (しかし、左極限 は存在する)

$$P(X=a) = F(a) - \lim_{x \rightarrow a} F(x) \text{ 也 } \text{也} \text{ 也} .$$

(Proof)

- (1) $A = \{\omega \mid X(\omega) \leq x\}$, $B = \{\omega \mid X(\omega) \leq y\}$ とおくと.
 $x \leq y$ より $A \subset B$ である.
 確率の単調性より $P(A) \leq P(B)$ である.

- (2) $x_1 > x_2 > \dots \rightarrow a$ なる $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ である数列を
 考へる. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{X(\omega) \leq x_n\}}_{A_n \text{ とする}} = \underbrace{\{X(\omega) \leq a\}}_A$ であることに注意すると.

確率の連続性より.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A) = F(a)$$

である.

- (3) 全く同様.

これはすこしめぐる
 $C = \{X(\omega) > a\}$ なら
 $\exists n$ なる $X(\omega) > x_n$ とおけるので
 その ω は $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X(\omega) \leq x_n\}$
 に入らなう.

Remark (次回、より詳しく述べる)

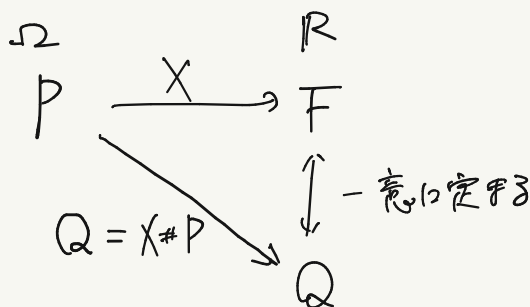
逆に (1)~(3) をおいた $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在したら.

対応する $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 Q が一意に存在する.

この Q は $Q((-\infty, a]) = F(a)$ ($\forall a \in \mathbb{R}$), $Q((a, b]) = F(b) - F(a)$
 である. ($\forall a < b$)

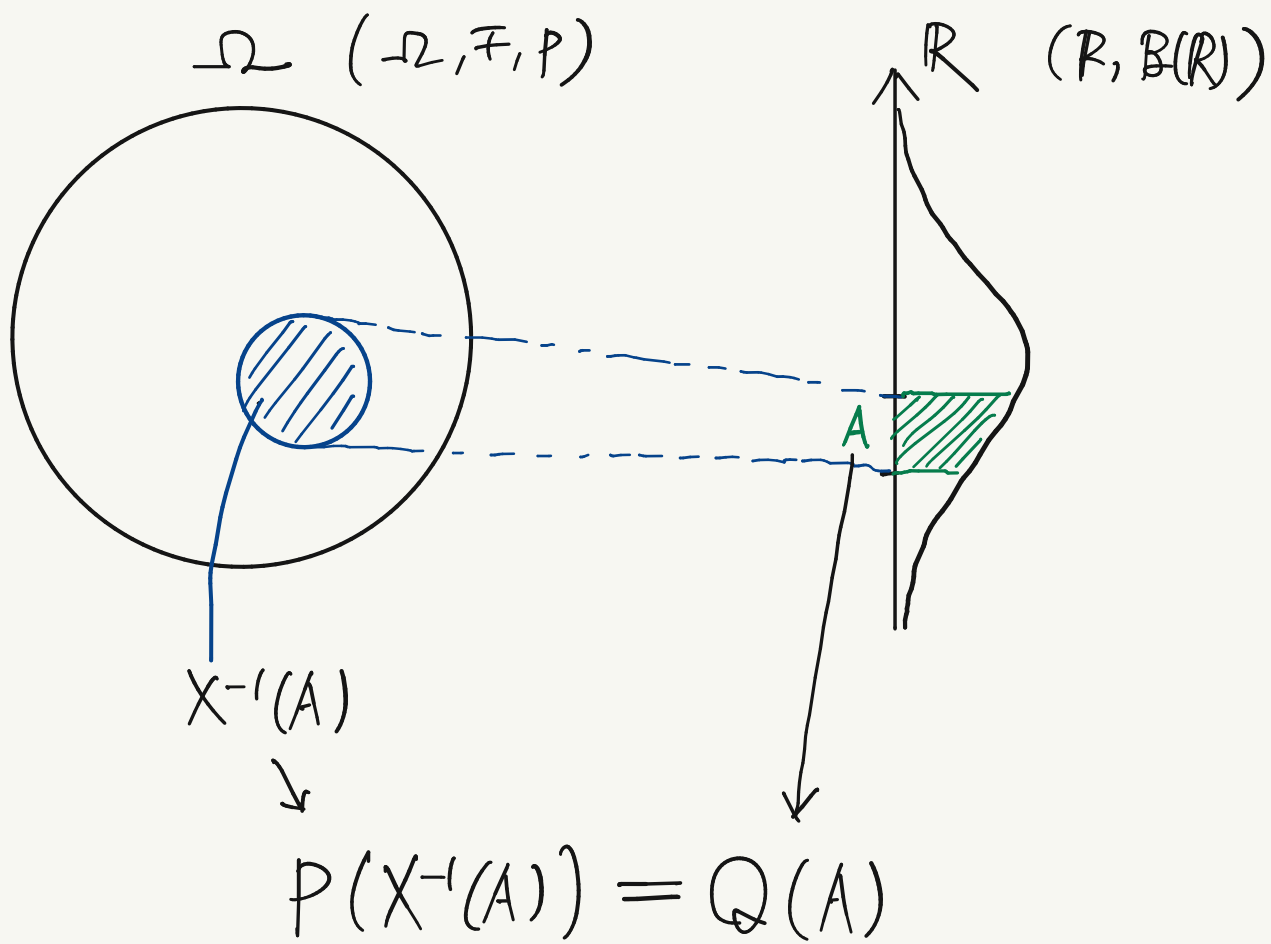
$$\underbrace{Q}_{(\text{測度})} \longleftrightarrow \underbrace{F}_{(\text{分布})}$$

P を言い換へる代わりに F を言い換へる方が楽なことが多い. (弱収束など)



$$Q(A) = P(X^{-1}(A)) \text{ である.}$$

$Q(A) = P(X^{-1}(A)) = P(X \in A)$
 である. これは
 P の X による push-forward と
 言う.
 $Q = X\#P$ と書く.



例: $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$, $P: \Omega \text{ 上の一様分布}$

$X(\omega) = \omega^2$ 対し. $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega^2 \leq x\}$

$= \{0 \leq \omega \leq \sqrt{x}\}$ (for $0 \leq x \leq 1$)

\uparrow
 $P(\{0 \leq \omega \leq \sqrt{x}\}) = \sqrt{x}$

$F(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \sqrt{x} & (0 < x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$

$X(\omega) = \omega^2$

$f(x)$

$P(X^{-1}((\frac{1}{9}, \frac{4}{9})) = P(X \in (\frac{1}{9}, \frac{4}{9}))$

$X^{-1}((\frac{1}{9}, \frac{4}{9}))$

$Q((\frac{1}{9}, \frac{4}{9}))$

ω x

$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 1$ $0 \quad \frac{1}{9} \quad \frac{4}{9} \quad 1$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

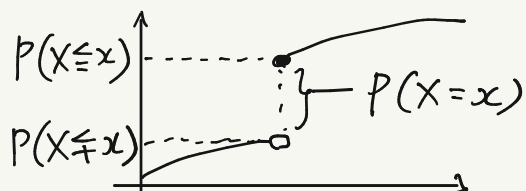
ω ω

確率分布の種類

- 連続
 - 絶対連続
 - 特異連続
- 離散

Def (連続分布)

$\forall x \in \mathbb{R}$ におう $F(x)$ が連続. かつ $P(X=x) = 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$).



($X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ の連続性とは関係なく $u = u$ に注意)

反例を作ってみよ.

Def (絶対連続分布)

(Borel σ -測度)

F が連続で, ある非負関数 f におう

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

と書けること. その分布は絶対連続であるという.

f を 確率密度関数 (probability density function, p.d.f.) とする.

($A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ におう $P(X \in A) = \int_A f(x) dx$ が成り立つ.) 絶対連続分布は連続である.

Thm (Radon-Nikodym の定理)

μ を \mathbb{R} 上の測度とする.

$\mu(E) = 0$ を満たす任意の $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ におう $P(E) = 0$ である.

$\Leftrightarrow F$ は絶対連続

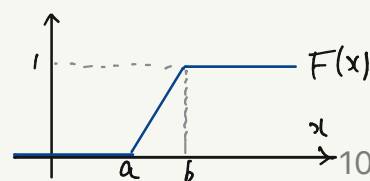
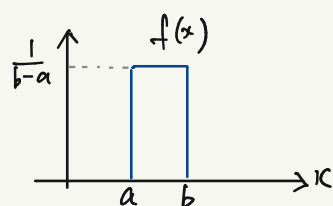
こちらを定義としてもよい.

Ex. (一様分布)

区間 $[a, b]$, $U[a, b]$: $[a, b]$ 上の一様分布

$$\text{p.d.f. } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (x \in [a, b]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$\text{c.d.f. } F(x) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ \frac{x-a}{b-a} & (x \in [a, b]) \\ 1 & (x > b) \end{cases}$$



⊗ Ex. (正規分布) — 「から分布」とも言う

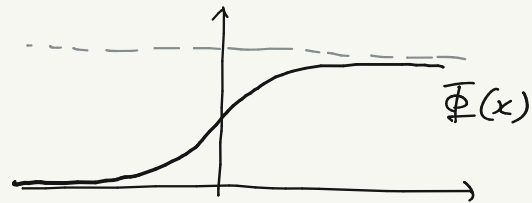
平均 $\mu \in \mathbb{R}$, 分散 $\sigma^2 > 0$

p.d.f. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

← 値は

$N(\mu, \sigma^2)$ と表す

$N(0, 1)$ を 標準正規分布 と言う



c.d.f. $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$ を 誤差関数 と 言う.
(error function)

Def (特異連続分布) \leftarrow (合計値がないことを含む)

F は連続であり、かつある $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$P(X \in E) = 1$ かつ $\mu(E) = 0$ (ルビノフ測度)

が成り立つ時、特異連続 であると言う。

\leftarrow 連続分布は「密度関数をもたない！」

Ex.

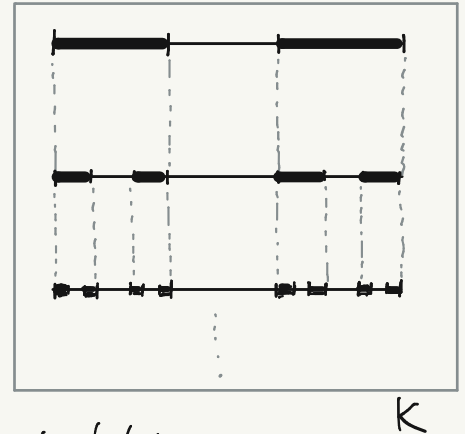
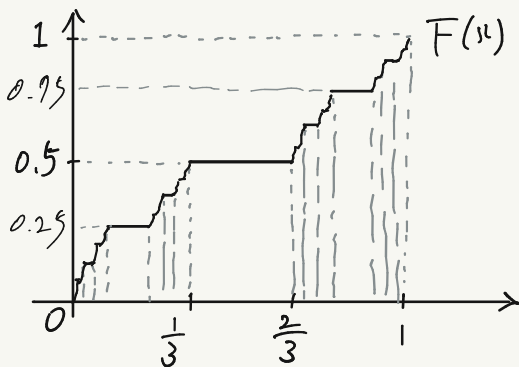
$\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1))$,

P は $[0, 1)$ 上の一様分布とする。

$X: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ なる二進数展開を用いて

$X(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_n}{3^n}$ とする。



かつ μ -ル集合 K に対して、

$$P(X \in K) = 1$$

一方、

$\mu(K) = 0$ (K は非可算濃度があつて、ルビノフ測度 $= 0$)

$$(\mu(K) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \dots = 0)$$

(注: μ -ル集合: 集合 $[0, 1]$ を 3 等分して、
 中央の部分を領域を取り除くという
 操作を無限的(可算回)を繰り返して得られる集合)

Def (離散分布)

X の取りうる範囲が高々可算個.

つまり、ある $V = \{v_1, v_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ が存在して (有限個でもいい)

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(X=v_k) = 1$$

が成立すると、離散分布 と言う。

$$f(v_k) = p(X=v_k)$$

のこゝを、確率質量関数 と言う。

(probability mass function, p.m.f.) //

分布関数は $F(x) = \sum_{k: v_k \leq x} f(v_k)$ と与えられる。

Ex. (Bernoulli分布)

$$V = \{0, 1\}, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

p.m.f. $f(1) = \theta, \quad f(0) = 1 - \theta$

$\text{Ber}(\theta)$ と記す。

← 2点投中 1回

表: 1

裏: 0

Ex. (二項分布)

$$V = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$0 \leq \theta \leq 1.$$

p.m.f. $f(k) = \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}$

$B(n, \theta)$ と記す。

← n 回の2点投げで
表が出た回数 k の
分布。

Ex. (Poisson分布)

$$V = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad \lambda > 0$$

p.m.f. $f(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

⊆ 稀に起こる現象が一定期間内に起こる回数分布:

- 工場で1日に生産される不良品の数
- 宇宙線が1時間に観測される回数

(補足)

Thm (ルバークの分解定理)

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 P は

絶対連続な分布 P_1 , 特異連続な分布 P_2 , 離散分布 P_3

に分解できる. すなわち, $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 \leq 1$, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$

である $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を用いて.

$$P = \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 + \theta_3 P_3$$

に分解でき, さらにこの分解は一意である. //